Problemas propuestos en el XXXVI Concurso "Puig Adam"

NIVEL I (3º ESO)

Primera parte (*1 hora* 30 *minutos*)

Problema 1 (7 *puntos*)

Encuentra el mayor número de cuatro cifras, [$\boldsymbol{abcd}$], tal que la suma de ellas sea igual al producto de las dos últimas e igual también al número formado por las dos primeras, es decir, $\boldsymbol{a + b + c + d = c{\cdot}d =}$ [$\boldsymbol{ab}$].

Problema 2 (7 *puntos*)

En el triángulo ABC, de lados $AB = 85$, $BC = 75$ y $CA = 40$, una semicircunferencia tangente a los lados AB y AC tiene su diámetro sobre el lado BC. Calcula el radio de esta semicircunferencia.

Segunda parte: problema encadenado (*1 hora* 30 *minutos*)

Problema 1A (1 *punto*)

La suma de dos números es 7 y la diferencia entre ellos es 2. ¿Cuál es el valor de su producto?

Problema 2A (1,5 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = 4T$. En una clase de la Universidad hay k estudiantes. Hay algunas parejas (chico-chica) que se sientan juntos. En concreto, un tercio de los chicos están sentados con una chica y la mitad de las chicas están sentadas con un chico. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

Problema 3A (2 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior. En el triángulo ABC, D es el punto medio del lado AB, E es el punto medio de DB y F es el punto medio del lado BC. Si el área del triángulo AEF es T, ¿cuál es el área del triángulo ABC?

Problema 1B (1 *punto*)

El triángulo de la *Figura 1* es rectángulo. ¿Cuál es la suma de los ángulos x e y?

Problema 2B (1,5 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = \frac{T}{10}$. ¿Cuál es la cifra de las unidades del número $k^1 + k^2 + k^3 + \ldots + k^k$?

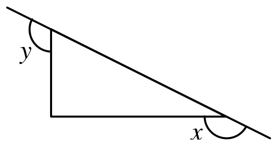

Figura 1

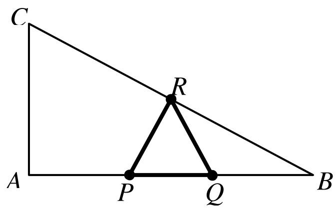

Figura 2

Problema 3B (2 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T - 1$. Un número tiene k divisores y su mitad y su tercera parte tienen cuatro divisores cada una. Si la suma de todos los divisores del número es 216, ¿cuál es dicho número?

Problema 4 (5 *puntos*)

Sea a la respuesta del problema 3A y b la respuesta del problema 3B. El triángulo ABC de la Figura 2 es rectángulo en A y R es el punto medio de la hipotenusa BC. Sobre el cateto mayor, AB, se marca el punto P tal que $CP = BP$ y sobre el segmento BP se marca el punto Q de manera que el triángulo PQR es equilátero. Si el área del triángulo ABC es $b - a$, ¿cuál es el área del triángulo PQR?

NIVEL II (4º ESO)

Primera parte (1 *hora* 30 *minutos*)

Problema 1 (7 *puntos*)

Todas las cifras del número entero positivo n son treses, ($n = 333\ldots3$), además n es divisible entre 383. Cuando dividimos el entero $\frac{n}{383}$ entre 1000, ¿qué resto obtenemos?

Problema 2 (7 *puntos*)

En el trapecio *ABCD* de la *Figura 3*, de bases *AB* y *CD* trazamos un semicircunferencia cuyo centro está en el lado *AB* y es tangente a los otros tres lados del trapecio. Si $AB = 289$ y $BC = 196$, calcula la longitud de *AD*.

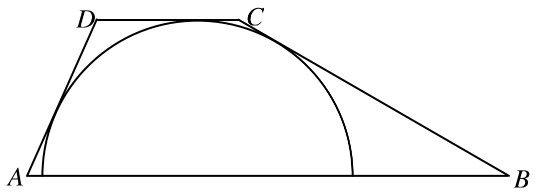

Figura 3

Segunda parte: problema encadenado (1 *hora* 30 *minutos*)

Problema 1A (1 *punto*)

Patricia tiene el mismo número de hermanas que de hermanos. Cada uno de sus hermanos tiene el 50 % más de hermanas que de hermanos (es decir, que si tuviera por ejemplo 8 hermanos tendría 12 hermanas). ¿Cuánto suman en total el número de hermanos y de hermanas de la familia?

Problema 2A (1,5 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula la cifra de las decenas del número T^T.

Problema 3A (2 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior. En el rectángulo $ABCD$ de lados $AB = 15T$ y $BC = 10T$, marcamos un punto P en su interior tal que $CP = 9T$ y $DP = 12T$. Determina la longitud de AP.

Problema 1B (1 *punto*)

En una bolsa hay 49 bolas azules y 1 roja. ¿Cuántas bolas azules debemos sacar de la bolsa para que el 90 % de las que queden sean azules?

Problema 2B (1,5 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior. En la *Figura 4* puedes ver un rectángulo de longitud T y anchura igual al radio de las dos circunferencias grandes que son tangentes a la pequeña, siendo ésta tangente a su vez a dos lados del rectángulo. Calcula la anchura del rectángulo.

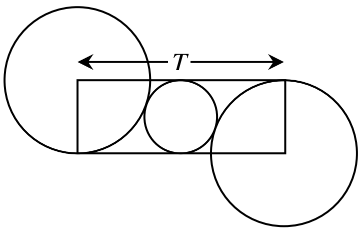

Figura 4

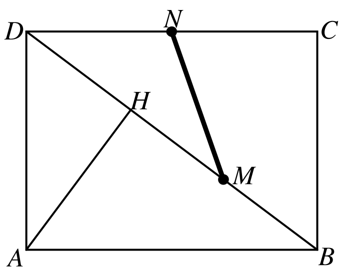

Figura 5

Problema 3B (2 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior y $n = T^2$. Calcula el valor de m para que el área de la región formada por los puntos (x, y) tales que $y \geq \frac{|x|}{2}$ e $y \leq m|x| + n$ sea $80n$.

Problema 4 (5 *puntos*)

Sea a la respuesta del problema 3A y b la respuesta del problema 3B. En el rectángulo $ABCD$ de la *Figura 5*, de lados $AB = a+b$ y $BC = 3|b|$, la perpendicular a la diagonal BD, trazada desde A, corta a BD en el punto H. Si M es el punto medio de BH y N el punto medio de CD, calcula la longitud del segmento MN.

NIVEL III (1º de Bachillerato)

Primera parte (1 *hora* 30 *minutos*)

Problema 1 (7 *puntos*)

Separamos los números 1, 2, 3,…, 101 en dos conjuntos A y B. El conjunto A contiene *m* de ellos y el resto en el conjunto B. Si pasamos el número 40 del conjunto en el que está al otro la media aritmética de cada uno de los nuevos conjuntos aumenta en 0,5 respecto de la que tenía antes. Encuentra los dos posibles valores de *m*.

Problema 2 (7 *puntos*)

En la *Figura 6* puedes observar cuatro circunferencias tangentes entre sí, tres de ellas de radios 1, 2 y 3. Calcula el radio *r* de la otra circunferencia, la más pequeña.

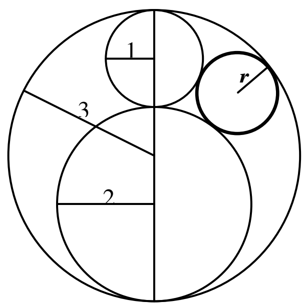

Figura 6

Segunda parte: problema encadenado (1 *hora* 30 *minutos*)

Problema 1A (1 *punto*)

En un triángulo en el que la medida de cada uno de sus ángulos, en grados, viene dada por un número entero, se verifica que uno de sus ángulos es 30º mayor que la media de los otros dos. ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tomar un ángulo de dicho triángulo?

Problema 2A (1,5 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = \frac{T}{33}$. La función $f(x) = \frac{cx}{2x+k}$ verifica que $f(f(x)) = x$ siempre que $x \neq \frac{-k}{2}$. ¿Cuál es el valor de c ?

Problema 3A (2 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T + 7$. En la *Figura 7* se observan dos rectas r_1 y r_2 de ecuaciones $y = mx$ e $y = nx$ respectivamente. Si el ángulo que forma la recta r_1 con el eje de abscisas es doble del que forma r_2 y la pendiente de r_1 es k veces la pendiente de r_2, ¿cuál es el valor de $m{\cdot}n$?

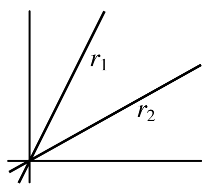

Figura 7

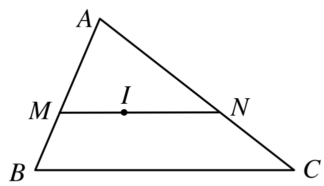

Figura 8

Problema 1B (1 *punto*)

Si escribes el número 888888 como producto de dos números de tres cifras cada uno, encuentra la diferencia entre estos dos números.

Problema 2B (1,5 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T - 36$.
Un círculo de área A_1 está contenido en otro de área $A_1 + A_2$. Si el radio de este segundo círculo es k y los números A_1, A_2 y $A_1 + A_2$ están en progresión aritmética, calcula el radio del círculo de área A_1.

Problema 3B (2 *puntos*)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = 3T^2$. En el triángulo ABC de la *Figura 8*, I es el punto de corte de las bisectrices (incentro) y el segmento MN, que pasa por I, es paralelo al lado BC. Si $AB = 3k$, $BC = 6k$ y $AC = 5k$, calcula el perímetro del triángulo AMN.

Problema 4 (5 *puntos*)

Sean a y b las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente. La longitud de uno de los lados de un triángulo es $\frac{b}{a}$. De los otros dos, la longitud de uno de ellos es doble de la del otro. ¿Cuál es el mayor valor posible para el área de este triángulo?